

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001**

Giovanni Dore

**CALCOLO FUNZIONALE H^∞ PER UN
OPERATORE ELLITTICO IN UN SEMISPAZIO**

24 aprile 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Riassunto. Sia A la realizzazione in L^p ($1 < p < \infty$) di un operatore differenziale $P(D_x, D_t)$ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ con condizioni al bordo $B_k(D_x, D_t)u(x, 0) = 0$ ($1 \leq k \leq m$), dove P è un polinomio omogeneo di grado $2m$ in $n+1$ variabili che soddisfa una opportuna condizione di ellitticità e i B_k sono polinomi omogenei di grado $m_k < 2m$; si suppone che la usuale condizione complementare sia verificata. Si dimostra che A è un operatore settoriale con calcolo funzionale H^∞ limitato.

Abstract. Let A be the L^p realization ($1 < p < \infty$) of a differential operator $P(D_x, D_t)$ on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ with boundary conditions $B_k(D_x, D_t)u(x, 0) = 0$ ($1 \leq k \leq m$). Here P is a homogeneous polynomial of order $2m$ in $n+1$ variables that satisfies a suitable ellipticity condition, and B_k is a homogeneous polynomial of order $m_k < 2m$; it is assumed that the usual complementing condition is satisfied. It is proved that A is a sectorial operator with a bounded H^∞ functional calculus.

1 Introduzione

In questo seminario esporrò un risultato, ottenuto in collaborazione con Alberto Venni, sulla limitatezza del calcolo funzionale H^∞ per la realizzazione in L^p ($1 < p < \infty$) di un operatore ellittico di ordine arbitrario su un semispazio, con condizioni alla frontiera generali, soddisfacenti la usuale condizione complementare. Per la precisione considero operatori ellittici a coefficienti costanti, coincidenti con la parte principale, con analoghe restrizioni per gli operatori di bordo. Questo caso dovrebbe costituire il primo passo verso la dimostrazione della limitatezza del calcolo funzionale H^∞ nel caso di operatori ellittici arbitrari su aperti limitati.

La limitatezza del calcolo funzionale H^∞ per un operatore settoriale A che agisce in uno spazio di Banach complesso è una proprietà più forte della limitatezza delle potenze immaginarie A^{is} ($s \in \mathbb{R}$), visto che la funzione $z \mapsto z^{is}$ è una funzione appartenente a H^∞ . Quest'ultima proprietà ha importanti conseguenze. Anzitutto essa implica la coincidenza tra il dominio di A^r e lo spazio di interpolazione complesso $[X, \mathcal{D}(A^n)]_{Re\,r/n}$ ($Re\,r \in]0, n[$); tale risultato è riportato in [22, Theorem 1.15.3] nella sua forma più generale, ma è stato utilizzato da vari autori già nei primi lavori sulle potenze frazionarie di operatori. In secondo luogo dalla limitatezza delle potenze immaginarie segue la regolarità massimale in L^p per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

cioè il fatto che qualunque sia $f \in L^p$ esiste una e una sola soluzione $u \in L^p$ del problema di Cauchy, tale che anche u' e Au appartengano a L^p (vedi [5, 12, 15]). È quindi evidente che la limitatezza delle potenze immaginarie per gli operatori ellittici ha interesse per lo studio di problemi parabolici.

La dimostrazione della limitatezza del calcolo funzionale H^∞ non presenta di solito difficoltà maggiori di quelle che si incontrano nel dimostrare la limitatezza delle potenze immaginarie e risulta più naturale.

In letteratura vi sono vari lavori riguardanti la limitatezza delle potenze immaginarie o del calcolo funzionale H^∞ per operatori ellittici. Per operatori del secondo ordine i risultati sono numerosi, vedi per esempio [4, 8, 9, 10, 14, 16, 20]. Per operatori di ordine arbitrario sono stati considerati due casi. Seeley in una serie di lavori pubblicati a cavallo tra gli anni '60 e '70 (vedi [17, 18, 19]) ha studiato le potenze immaginarie di sistemi ellittici su varietà senza bordo o su aperti limitati, sotto le ipotesi che i coefficienti e l'aperto siano C^∞ ; successivamente Duong ha dimostrato, nello stesso ambito, la limitatezza del calcolo funzionale H^∞ (vedi [7]). Più recentemente Amann, Hieber, Simonett e Duong [3, 11] hanno considerato sistemi ellittici su tutto lo spazio o su varietà senza bordo, giungendo a provare la limitatezza del calcolo funzionale H^∞ sotto ipotesi minimali di regolarità dei coefficienti. Nulla è noto per operatori di ordine arbitrario su un sottoinsieme proprio di \mathbb{R}^n , con opportune condizioni al bordo, nel caso non C^∞ e le tecniche di Seeley non consentono di affrontare questo caso.

2 Posizione del problema e teorema principale

Dato un operatore lineare T in uno spazio di Banach X , indichiamo con $\mathcal{D}(T)$ il dominio di T , con $\mathcal{R}(T)$ l'immagine, con $\sigma(T)$ lo spettro di T e con $\rho(T)$ l'insieme risolvente.

Per $\theta \in]0, \pi]$ indichiamo con S_θ il settore aperto del piano complesso di semiampiezza θ attorno a \mathbb{R}^+ , cioè

$$S_\theta = \{\rho e^{i\alpha} \mid \rho \in \mathbb{R}^+, \alpha \in]-\theta, \theta[\};$$

utilizzeremo la scrittura $\overline{S_\theta}$ anche nel caso $\theta = 0$ per indicare l'intervallo $[0, \infty[$. Per $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ indichiamo con Σ_θ il doppio settore aperto del piano complesso di semiampiezza θ attorno all'asse immaginario, cioè

$$\Sigma_\theta = \{i\rho e^{i\alpha} \mid \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in]-\theta, \theta[\} = (iS_\theta) \cup (-iS_\theta).$$

Se Ω è un aperto del piano complesso o di \mathbb{C}^n indichiamo con $H^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate da Ω a \mathbb{C} (o talvolta a valori in uno spazio di Banach). Esso è uno spazio di Banach rispetto alla norma dell'estremo superiore.

In particolare se $\Omega = (S_\theta)^n$ o $\Omega = (\Sigma_\theta)^n$ indicheremo con $H_0^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni in $H^\infty(\Omega)$ che vanno a 0 almeno come una potenza in 0 e all'infinito, cioè tali che esistono $C > 0$ e $s > 0$ per cui

$$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \quad |f(z)| \leq C \prod_{j=1}^n \min\{|z_j|^s, |z_j|^{-s}\}.$$

Dati i polinomi P, B_1, \dots, B_m omogenei in $n+1$ variabili ($n \geq 1$) a coefficienti complessi, con P di grado $2m$ e B_k di grado m_k ($m_k < 2m$) consideriamo il problema di valori al bordo

$$\begin{cases} P(D_x, D_t)u(x, t) = f(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ B_k(D_x, D_t)u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$. Qui e nel seguito teniamo distinta la variabile t normale alla frontiera del semispazio dalle variabili $x = (x_1, \dots, x_n)$ tangenziali. Con $D_x = (D_1, \dots, D_n)$ indichiamo la n -pla degli operatori di derivazione parziale rispetto alle variabili x_1, \dots, x_n e con D_t l'operatore di derivazione parziale rispetto alla variabile t .

La realizzazione in L^p di questo problema è l'operatore A in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ definito da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \{u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \mid B_k(D_x, D_t)u(x, 0) = 0, \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, m\} \\ Au(x, t) &= P(D_x, D_t)u(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Supponiamo che P sia (L, ω) -ellittico (dove $L \in \mathbb{R}^+$ e $\omega \in [0, \pi[$) nel senso che:

1. $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad P(ix, it) \in \overline{S_\omega}$;
2. $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad |P(ix, it)| \geq L^{-1} \|(x, t)\|$;

3. i coefficienti del polinomio P sono tutti, in modulo, minori o uguali di L .

Si può facilmente dimostrare, con argomenti di omogeneità e di compattezza, che un polinomio omogeneo è (L, ω) -ellittico (per opportuni L e ω) se e solo se

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \quad P(ix, it) \notin]-\infty, 0].$$

Si può dimostrare che se $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in (\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}) \cup \{0\}$ e $(x, \mu) \neq (0, 0)$ allora il polinomio $\mu - P(ix, \cdot)$ (che ha grado $2m$) ha esattamente m radici con parte reale positiva e m con parte reale negativa. Esso può quindi essere fattorizzato nella forma

$$\mu - P(ix, \lambda) = P_{ix, \mu}^+(\lambda) P_{ix, \mu}^-(\lambda),$$

dove $P_{ix, \mu}^+$ (rispettivamente $P_{ix, \mu}^-$) è un polinomio di grado m con tutte le radici aventi parte reale positiva (rispettivamente negativa).

Supponiamo inoltre che gli operatori di bordo soddisfino la *condizione complementare* di tipo ω , cioè che:

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mu \in (\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}) \cup \{0\}$ se $(x, \mu) \neq (0, 0)$ allora i polinomi (in una variabile) $B_1(ix, \cdot), \dots, B_m(ix, \cdot)$ sono linearmente indipendenti modulo $P_{ix, \mu}^-$.

In queste ipotesi dimostriamo che:

Teorema 2.1 *A è un operatore settoriale con angolo spettrale ω e ha calcolo funzionale H^∞ limitato su ogni settore S_θ , per $\theta \in]\omega, \pi[$.*

Dire che A è settoriale con angolo spettrale ω significa che

1. $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\omega}$;
2. $\forall \theta \in]\omega, \pi[$ la funzione $\lambda \mapsto \lambda(\lambda - A)^{-1}$ è limitata su $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$;
3. A ha dominio e immagine densi.

Dire che A ha calcolo funzionale H^∞ limitato sul settore S_θ significa che qualunque sia $h \in H^\infty(S_\theta)$ l'operatore $h(A)$ è limitato e esiste $C > 0$ (indipendente da h) tale che

$$\|h(A)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))} \leq C \sup_{S_\theta} |h|$$

(vedi [24] per la definizione di $h(A)$).

Ogni funzione in H^∞ si può approssimare, in modo opportuno, con funzioni in H_0^∞ ; da ciò segue che per dimostrare che un operatore ha calcolo funzionale H^∞ limitato è sufficiente provare la disuguaglianza scritta sopra quando $h \in H_0^\infty$.

Idea della dimostrazione. La tecnica utilizzata per provare il teorema 2.1 è la seguente. Anzitutto consideriamo l'operatore differenziale ordinario A_z in $L^p(\mathbb{R}^+)$ ottenuto dal problema ellittico in $n+1$ variabili sostituendo gli operatori D_1, \dots, D_n con i parametri complessi z_1, \dots, z_n , cioè poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_z) &= \{u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \mid B_k(z, D_t)u(0) = 0, \text{ per } k = 1, \dots, m\} \\ A_z u(t) &= P(z, D_t)u(t) \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Se z_1, \dots, z_n appartengono a un opportuno intorno conico di $(i\mathbb{R})^n$, cioè $z \in (\Sigma_\beta)^n$, allora si dimostra che A_z è θ -settoriale, dove, scegliendo β opportunamente piccolo, si può prendere θ arbitrariamente vicino a ω . Si dimostra inoltre che A_z ha calcolo funzionale H^∞ limitato su ogni settore contenente strettamente S_θ . Infine si dimostra che se $h \in H^\infty(S_\theta)$ allora la funzione $z \mapsto h(A_z)$ (che è a valori in $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+))$) risulta essere olomorfa e R-limitata su un opportuno $(\Sigma_\beta)^n$ (vedi [24] per la definizione di famiglia di operatori R-limitata).

Dato un operatore limitato T in $L^p(\mathbb{R}^+)$ ad esso risulta naturalmente associato un operatore limitato in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, che con abuso di notazione continuiamo a indicare con T , costruito ponendo $Tf(x, t) = T(f(x, \cdot))(t)$. Analoga costruzione, con qualche precauzione in più dovuta al fatto che esso non è limitato, può essere fatta a partire dall'operatore A_z . In questo nuovo ambito l'operatore A_z gode delle stesse proprietà.

Gli operatori D_1, \dots, D_n , di derivazione parziale rispetto alle prime n variabili nello spazio $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, hanno come spettro l'asse immaginario, quindi la funzione $z \mapsto g_h(z) = h(A_z)$ è olomorfa su un intorno conico del prodotto cartesiano degli spettri degli operatori D_1, \dots, D_n . Inoltre si vede facilmente che, come conseguenza del fatto che gli operatori D_1, \dots, D_n e A_z agiscono su variabili diverse, gli operatori di derivata parziale hanno risolvanti che commutano tra di loro e con $h(A_z)$. Ciò consente di applicare (una generalizzazione di) un recentissimo teorema di Kalton e Weiss e di concludere che l'operatore $g_h(D_1, \dots, D_n)$ è limitato, con norma che si controlla con $\sup_z \|g_h(z)\| = \sup_z \|h(A_z)\|$ che a sua volta si controlla con $\sup |h|$.

L'operatore $g_h(D_1, \dots, D_n)$ è ottenuto, formalmente, con il seguente procedimento: nella definizione dell'operatore A si sostituiscono agli operatori D_1, \dots, D_n i numeri complessi z_1, \dots, z_n , quindi si costruisce la funzione h dell'operatore così ottenuto e si rimettono gli operatori D_1, \dots, D_n al posto di z_1, \dots, z_n . È quindi ragionevole aspettarsi che $g_h(D_1, \dots, D_n)$ risulti essere uguale a $h(A)$; ciò è vero, ma la dimostrazione è piuttosto complessa. Essa si basa tra l'altro sul fatto che, fissato $\mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$, per una opportuna scelta di h l'operatore $g_h(D_1, \dots, D_n)$ è l'inverso di $\mu - A$, ciò consente di concludere che A è settoriale. Naturalmente da $g_h(D_1, \dots, D_n) = h(A)$ segue che $h(A)$ è limitato e che la sua norma è controllata da $\sup |h|$.

Osserviamo inoltre che nel corso della dimostrazione si ottiene la consueta stima a priori per le soluzioni del problema ellittico:

$$\|u\|_{W^{2n,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \leq C (\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)}) \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Nel seguito saranno illustrati in maggiore dettaglio i passaggi della dimostrazione.

3 Studio degli operatori alle derivate ordinarie

Studiamo ora l'operatore differenziale ordinario A_z definito sopra. Tale studio è basato sulle tecniche classiche di integrazione su circuiti del piano complesso che circondano gli zeri del polinomio $\mu - P(z, \cdot)$, separando gli zeri con parte reale positiva da quelli con parte reale negativa (vedi p. es. [1, 2, 21]).

Al fine di dimostrare che l'operatore A_z gode di buone proprietà non solo per $z \in (i\mathbb{R})^n$, ma anche per z appartenente a un intorno conico di tale insieme, è necessa-

rio dimostrare che ellitticità e condizione complementare valgono anche vicino all'asse immaginario. Si ha infatti:

Teorema 3.1 Per ogni $\theta \in]\omega, \pi[$ esiste $\varphi(\theta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tale che:

1. se $(z, \lambda) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times \overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}} \setminus \{(0, 0)\}$ allora $P(z, \lambda) \in S_\theta$ e esiste $C(\theta) \in \mathbb{R}^+$ tale che $|P(z, \lambda)| \geq C(\theta) \|(z, \lambda)\|^{2m}$;
2. se $(z, \lambda) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times \overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}} \setminus \{(0, 0)\}$ allora il polinomio $\mu - P(z, \cdot)$ può essere scomposto nella forma $P_{z, \mu}^+ P_{z, \mu}^-$, dove $P_{z, \mu}^+$ (rispettivamente $P_{z, \mu}^-$) è un polinomio di grado m con radici aventi parte reale positiva (rispettivamente negativa) e inoltre i polinomi $B_1(z, \cdot), \dots, B_m(z, \cdot)$ sono linearmente indipendenti modulo $P_{z, \mu}^-$.

Teorema 3.2 Sia $\theta \in]\omega, \pi[$. Se $(z, \mu) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times (\mathbb{C} \setminus S_\theta) \setminus \{(0, 0)\}$ allora $\mu \in \rho(A_z)$. Inoltre esiste $C(\theta) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\|D^\ell(\mu - A_z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+))} \leq C(\theta) (\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{\ell}{2m}-1}$$

qualunque siano $(z, \mu) \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \times (\mathbb{C} \setminus S_\theta) \setminus \{(0, 0)\}$ e $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq 2m$.

Perciò A_z è un operatore settoriale con angolo spettrale θ .

Dimostrazione. Invertire l'operatore $\mu - A_z$ significa risolvere, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, l'equazione $\mu u - A_z u = f$ e questo equivale a risolvere il problema

$$(PNO) \quad \begin{cases} u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu u(t) - P(z, D)u(t) = f(t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z, D)u)(0) = 0 & 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

La condizione complementare assicura che il problema

$$(PO) \quad \begin{cases} u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu u(t) - P(z, D)u(t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z, D)u)(0) = b_k & 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione qualunque siano $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$, quindi è evidente che (PNO) ha al più una soluzione. Risulta utile cercare tale soluzione nella forma $u = S_{z, \mu} f + T_{z, \mu} f$, dove $S_{z, \mu} f$ soddisfa l'equazione

$$(ENO) \quad \begin{cases} u \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu u(t) - P(z, D)u(t) = f(t) \end{cases}$$

mentre $T_{z, \mu} f$ è soluzione di (PO) con $b_k = -(B_k(z, D)S_{z, \mu} f)(0)$.

Si dimostra che come $S_{z, \mu} f$ si può prendere $H_{z, \mu} * f$ (considerando f prolungata a \mathbb{R} con 0), dove $H_{z, \mu}$ è la funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\mathcal{F}H_{z, \mu}(\xi) = \frac{1}{\mu - P(z, i\xi)}.$$

Naturalmente $D^\ell(H_{z,\mu} * f) = D^\ell H_{z,\mu} * f$ e si ha $\|D^\ell H_{z,\mu}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(\theta) (\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{\ell}{2m}-1}$.

Inoltre si può dimostrare che l'unica soluzione di (PO) con $b_k = -(B_k(z, D) S_{z,\mu} f)(0)$ può essere scritta nella forma

$$T_{z,\mu} f(t) = \int_{\mathbb{R}^+} K_{z,\mu}(t, s) f(s) ds$$

dove $K_{z,\mu} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ è tale che

$$|D^\ell K_{z,\mu}(t, s)| \leq C(\theta) (\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{\ell+1}{2m}-1} e^{-(t+s)(\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{1}{2m}}}.$$

La disuguglianza di Young assicura che l'operatore $D^\ell S_{z,\mu}$ è limitato da L^p a L^p con norma che si maggiora con una costante per $(\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{\ell}{2m}-1}$. Dalla stima di $D^\ell K_{z,\mu}$ segue che $D^\ell T_{z,\mu}$ è un operatore limitato in $L^p(\mathbb{R}^+)$ con norma che si maggiora con

$$C(\theta) (\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{\ell+1}{2m}-1} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \left(e^{-t(\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{1}{2m}}} \right)^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \left(e^{-s(\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{1}{2m}}} \right)^{p'} ds \right)^{1/p'} = \\ \frac{C(\theta)}{p^{1/p} p'^{1/p'}} (\|z\|^{2m} + |\mu|)^{\frac{\ell}{2m}-1}.$$

Teorema 3.3 Siano $\theta \in]\omega, \pi[$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus (S_\theta \cup \{0\})$, $\ell \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tali che $|\alpha| + \ell \leq 2m$. Allora $\{z^\alpha D^\ell (\mu - A_z)^{-1} \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ è R-limitato.

Inoltre, nel caso $\alpha = 0$, $\ell = 0$ la costante di R-limitatezza si maggiora con $\frac{C(\theta)}{|\mu|}$.

Dimostrazione. Come visto nella dimostrazione del teorema precedente, $(\mu - A_z)^{-1}$ può essere scritto come somma di due operatori integrali, $S_{z,\mu}$ di convoluzione con il nucleo $H_{z,\mu}$ e $T_{z,\mu}$ avente nucleo $K_{z,\mu}$; analogamente $z^\alpha D^\ell (\mu - A_z)^{-1}$ può essere scomposto nella somma di un operatore di convoluzione con il nucleo $z^\alpha D^\ell H_{z,\mu}$ e un operatore integrale con nucleo $z^\alpha D_t^\ell K_{z,\mu}$.

Data una famiglia di operatori di convoluzione in L^p i cui nuclei soddisfano le ipotesi del teorema di Mihlin uniformemente, tale famiglia di operatori risulta essere R-limitata (vedi [23, 24]); ciò consente di provare la R-limitatezza della famiglia degli operatori di convoluzione.

La stima già vista per le derivate del nucleo $K_{z,\mu}$ consente di maggiorare (uniformemente in z) $z^\alpha D_t^\ell K_{z,\mu}$ con una costante per il nucleo di Hilbert $\frac{1}{t+s}$; da tale maggiorazione e dal fatto che il nucleo di Hilbert definisce un operatore integrale limitato in $L^p(\mathbb{R}^+)$ segue la R-limitatezza della seconda famiglia di operatori integrali.

Teorema 3.4 Sia $\theta \in]\omega, \pi[$, $\delta \in]\theta, \pi[$. Allora $\forall z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n$ l'operatore A_z ha calcolo funzionale $H^\infty(S_\delta)$ limitato. Inoltre $\forall h \in H^\infty(S_\delta)$ l'insieme $\{h(A_z) \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ è R-limitato e la costante di R-limitatezza si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto le funzioni $h \in H_0^\infty(S_\theta)$. Per tali h si ha

$$h(A_z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) (\mu - A_z)^{-1} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) S_{z,\mu} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) T_{z,\mu} d\mu$$

dove γ è la frontiera di S_θ orientata opportunamente.

Ora se $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) S_{z,\mu} f d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) (H_{z,\mu} * f) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) H_{z,\mu} d\mu * f$$

e, indicata con \mathcal{F} la trasformata di Fourier, utilizzando il teorema dei residui si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) H_{z,\mu} d\mu\right)(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) \mathcal{F}H_{z,\mu}(\xi) d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(\mu)}{\mu - P(z, i\xi)} d\mu = h(P(z, i\xi)). \end{aligned}$$

La funzione $\xi \mapsto h(P(z, i\xi))$ è limitata su \mathbb{R} e si può dimostrare, come conseguenza del fatto che si può estendere a una funzione olomorfa e limitata su $i\Sigma_{\varphi(\theta)}$, che la sua derivata si maggiora con

$$\frac{C(\theta)}{|\xi|} \sup_{\lambda \in i\Sigma_{\varphi(\theta)}} |h(P(z, i\xi))| = \frac{C(\theta)}{|\xi|} \|h\|_\infty$$

e quindi, per il teorema dei moltiplicatori di Mihlin, l'operatore

$$f \mapsto \int_\gamma h(\mu) H_{z,\mu} d\mu * f$$

è limitato e ha norma che si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$.

Utilizzando, come nella dimostrazione del teorema 3.3, il fatto che una famiglia di operatori di convoluzione, con nuclei che soddisfano uniformemente le ipotesi del teorema di Mihlin, risulta essere R-limitata, possiamo concludere che la famiglia di operatori scritta sopra è R-limitata con costante di R-limitatezza maggiorata da $C(\theta)\|h\|_\infty$.

D'altra parte

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) T_{z,\mu} f d\mu\right)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) \int_{\mathbb{R}^+} K_{z,\mu}(t, s) f(s) ds d\mu = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(\mu) K_{z,\mu}(t, s) d\mu f(s) ds \end{aligned}$$

e, dalla stima già vista per il nucleo $K_{z,\mu}$, si ottiene

$$\left|\int_\gamma h(\mu) K_{z,\mu}(t, s) d\mu\right| \leq C(\theta) \|h\|_\infty \int_\gamma |\mu|^{\frac{1}{2m}-1} e^{-(t+s)M_1(\theta)|\mu|^{\frac{1}{2m}}} d|\mu| \leq \frac{C(\theta)}{t+s} \|h\|_\infty,$$

e questa stima, analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema 3.3, consente di concludere che

$$\left\{ f \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\mu) T_{z,\mu} f d\mu \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n \right\}$$

è R-limitato con costante di R-limitatezza che si maggiora con $C(\theta) \|h\|_{\infty}$.

Possiamo quindi concludere che per $h \in H_0^{\infty}$ è $\|h(A_z)\| \leq C(\theta) \|h\|_{\infty}$ e da qui segue che A_z ha calcolo funzionale H^{∞} limitato. Inoltre per $h \in H_0^{\infty}$ $\{h(A_z) \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ è R-limitato. Visto che ogni funzione H^{∞} è limite di funzioni H_0^{∞} si ottiene che quest'ultima affermazione è vera per ogni $h \in H^{\infty}$.

Osserviamo infine che si può facilmente dimostrare che le funzioni $z \mapsto D^{\ell}(\mu - A_z)^{-1}$ e $z \mapsto h(A_z)$ sono olomorfe.

Passiamo ora allo studio degli operatori di derivazione rispetto alle variabili tangenziali. Nello spazio di Banach $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ consideriamo gli operatori D_1, \dots, D_n definiti da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(D_j) &= \{u \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \mid D_j u \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)\} \\ D_j u &= \frac{\partial u}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Si può dimostrare, con un calcolo diretto, che $\sigma(D_j) = i\mathbb{R}$ e che

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}) \quad \|(\lambda - D_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))} \leq \frac{1}{|\operatorname{Re} \lambda|},$$

da cui segue che $\lambda(\lambda - D_j)^{-1}$ si mantiene limitato al di fuori di qualunque doppio settore Σ_{β} . Si può inoltre facilmente dimostrare che tali operatori hanno dominio e immagine densi. Vista l'analogia con gli operatori settoriali, risulta naturale chiamare gli operatori che godono di queste proprietà *bisettoriali* con angolo spettrale β .

Ciò consente di definire per D_j un calcolo funzionale analogo a quello degli operatori settoriali, considerando però funzioni olomorfe e limitate sui doppi settori anziché sui settori. È possibile anche, visto che gli operatori D_1, \dots, D_n hanno risolventi che commutano, definire $h(D_1, \dots, D_n)$ quando h è olomorfa e limitata su $(\Sigma_{\beta})^n$. In questo caso parliamo di calcolo funzionale congiunto. Si dimostra, facendo uso del teorema dei moltiplicatori di Mihlin, che tale calcolo funzionale congiunto è limitato.

4 Studio dell'operatore ellittico

Da ora in avanti tutti gli operatori verranno considerati nello spazio $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$; con abuso di notazione la scrittura A_z indicherà il corrispondente in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ dell'operatore A_z in $L^p(\mathbb{R}^+)$ considerato nella sezione precedente.

I risultati sull'operatore ellittico A che seguono si basano su quanto esposto nella sezione precedente e sul seguente risultato, che è essenzialmente dovuto a Kalton e Weiss (vedi [13, Theorem 4.4]), e che nella forma qui riportata si trova in [6].

Teorema 4.1 Siano T_1, \dots, T_n operatori bisettoriali nello spazio di Banach X con risolvanti che commutano. Supponiamo essi abbiano calcolo funzionale congiunto $H^\infty((\Sigma_\beta)^n)$ limitato. Sia $f : (\Sigma_\beta)^n \rightarrow \mathcal{T}$ una funzione olomorfa con immagine R -limitata, dove \mathcal{T} è il sottospazio di $\mathcal{L}(X)$ degli operatori che commutano con T_1, \dots, T_n . Allora $f(T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre $\|f(T_1, \dots, T_n)\|$ è maggiorata una costante (dipendente da T_1, \dots, T_n) per la costante di R -limitatezza dell'immagine di f .

Sia $\theta \in]\omega, \pi[$. Per $\mu \in \mathbb{C} \setminus S_\theta$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\ell \in \mathbb{N}$ con $|\alpha| + \ell \leq 2m$ indichiamo con $G_{\mu, \alpha, \ell}$ la funzione da $(\Sigma_{\varphi(\theta)})^n$ a $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))$ tale che $G_{\mu, \alpha, \ell}(z) = z^\alpha D_t^\ell (\mu - A_z)^{-1}$. Indichiamo inoltre con R_μ la funzione $z \mapsto (\mu - A_z)^{-1} = G_{\mu, 0, 0}(z)$.

$G_{\mu, \alpha, \ell}$ è olomorfa e, per il teorema 3.3, R -limitata; se in particolare $\alpha = 0$ e $\ell = 0$ allora la costante di R -limitatezza si controlla con $1/|\mu|$. Inoltre i suoi valori commutano con gli operatori D_1, \dots, D_n , quindi per il teorema 4.1, $G_{\mu, \alpha, \ell}(D_x) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))$ e

$$\|G_{\mu, 0, 0}(D_x)\| \leq \frac{C(\theta)}{|\mu|},$$

In modo analogo se $h \in H^\infty(S_\delta)$ allora, per il teorema 3.4, l'insieme $\{h(A_z) \mid z \in (\overline{\Sigma_{\varphi(\theta)}})^n\}$ è R -limitato e la costante di R -limitatezza si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$, e quindi possiamo concludere che, posto $G_h(z) = h(A_z)$, l'operatore $G_h(D_x)$ è limitato e la sua norma si maggiora con una costante per $\|h\|_\infty$.

Ciò che rimane da dimostrare per completare la dimostrazione del teorema 2.1, oltre alla densità di $\mathcal{D}(A)$ e di $\mathcal{R}(A)$, è che $R_\mu(D_x) = (\mu - A)^{-1}$ e che $G_h(D_x) = h(A)$ e questo viene ottenuto in vari passi successivi.

Nelle dimostrazioni che seguono utilizzeremo le funzioni $\Psi_j : (\mathbb{C} \setminus \{-j, -1/j\})^n \rightarrow \mathbb{C}$ ($j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) definite da

$$\Psi_j(z) = \prod_{k=1}^n \frac{j^2 z_k}{(j + z_k)(1 + j z_k)}.$$

Indicheremo con Ψ la funzione Ψ_1 . La funzione Ψ è quella che interviene nella definizione del calcolo funzionale H^∞ . Infatti se $\Gamma = \prod_{j=1}^n \Gamma_j$ dove Γ_j è una opportuna curva orientata nel piano z_j , e $h \in H^\infty$ si ha per definizione

$$h(D_x) = \Psi_j(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \Psi_j(z) h(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz.$$

Il calcolo funzionale rispetta le derivate del risolvente, come segue subito dal fatto che $G_{\mu, \alpha, \ell}(D_x) \in \mathcal{L}(L^p)$:

Lemma 4.2 Per $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\ell \in \mathbb{N}$ con $|\alpha| + \ell \leq 2m$ si ha $G_{\mu, \alpha, \ell}(D_x) = D_x^\alpha D_t^\ell R_\mu(D_x)$ e quindi $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ $R_\mu(D_x)f \in W^{2m, p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.

Lemma 4.3 $R_\mu(D_x)$ è un inverso destro di $\mu - A$.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che per $f \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ risulta $R_\mu(D_x)f \in \mathcal{D}(A)$. Per il lemma 4.2 è $R_\mu(D_x)f \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, quindi resta da dimostrare che $B_k(D_x, D_t) R_\mu(D_x)f$ ha traccia nulla a $t = 0$.

Indichiamo con T_0 l'operatore di traccia a $t = 0$. Tale operatore è continuo nella norma di $\mathcal{D}(D_t)$.

Poniamo $G_k(z) = B_k(z, D_t)(\mu - A_x)^{-1}$. Per il lemma 4.2 si ha $B_k(D_x, D_t) R_\mu(D_x) = G_k(D_x)$. Visto che $\Psi_j(D_x) G_k(D_x)f \xrightarrow{j \rightarrow \infty} G_k(D_x)f$ nella norma di $\mathcal{D}(D_t)$, si ha anche $T_0 \Psi_j(D_x) G_k(D_x)f \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T_0 G_k(D_x)f$; perciò per dimostrare che $T_0 G_k(D_x)f = 0$ è sufficiente dimostrare che per ogni $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è $T_0 \Psi_j(D_x) G_k(D_x)f = 0$. Le funzioni $\Psi_j G_k$ hanno il vantaggio, rispetto alle funzioni G_k , di appartenere a H_0^∞ ; quindi si ha

$$T_0 \Psi_j(D_x) G_k(D_x)f = T_0(\Psi_j G_k)(D_x)f = T_0 \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi_j(z) G_k(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz \right),$$

l'integrale scritto sopra converge nella norma di $\mathcal{D}(D_t)$ quindi l'operatore di traccia può essere portato dentro integrale e la quantità scritta sopra è uguale a

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi_j(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} T_0 G_k(z) f dz$$

che è nullo perché $T_0 G_k(z) f = T_0 B_k(z, D_t)(\mu - A_x)^{-1} f = 0$, visto che $(\mu - A_x)^{-1} f \in \mathcal{D}(A_x)$.

Per dimostrare che $(\mu - A) R_\mu(D_x) = I_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)}$ è sufficiente osservare che se g è la funzione che vale costantemente $I_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)}$ allora $g(D_x) = I_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)}$, ma si ha anche $g(z) = (\mu - P(z, D_t)) R_\mu(z)$ e quindi, per il lemma 4.2, $g(D_x) = (\mu - P(D_x, D_t)) R_\mu(D_x)$.

Per dimostrare che $R_\mu(D_x)$ è un inverso sinistro di $\mu - A$ è necessario un risultato preliminare. Con $W_x^{r,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ denotiamo lo spazio delle funzioni le cui derivate rispetto alle variabili x_1, \dots, x_n (fino all'ordine r) appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.

Lemma 4.4 *Siano $r \in \mathbb{N}$ e $g : (\Sigma_{\varphi(\theta)})^n \rightarrow W_x^{r,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ olomorfa. Supponiamo che per $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tali che $|\alpha| + |\beta| \leq r$ la funzione $z \mapsto z^\alpha D_x^\beta(g(z))$ sia limitata. Allora per $|\alpha| \leq r$ abbiamo*

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{k=1}^n (z_k - D_k)^{-1} D_x^\alpha(g(z)) dz = \int_{\Gamma} z^\alpha \Psi(z) \prod_{k=1}^n (z_k - D_k)^{-1} g(z) dz.$$

Dimostrazione. Ovviamente è sufficiente dimostrare il teorema quando $|\alpha| = 1$ perché il caso generale si ottiene per iterazione. Si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{k=1}^n (z_k - D_k)^{-1} D_j(g(z)) dz = \\ & \int_{\Gamma} \Psi(z) \left(z_j \prod_{k=1}^n (z_k - D_k)^{-1} - \prod_{k \neq j} (z_k - D_k)^{-1} \right) g(z) dz, \end{aligned}$$

ma

$$\int_{\Gamma_j} \Psi(z) \prod_{k \neq j} (z_k - D_k)^{-1} g(z) dz_j = 0$$

perché la funzione integranda è olomorfa "all'interno" di Γ_j e quindi

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{k \neq j} (z_k - D_k)^{-1} g(z) dz = 0$$

e la dimostrazione è conclusa.

Lemma 4.5 $R_{\mu}(D_x)$ è un inverso sinistro di $\mu - A$.

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{D}(A)$. Dal lemma 4.4 segue che quando $|\alpha| + \ell \leq 2m$

$$\int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} R_{\mu}(z) D_x^{\alpha} D_t^{\ell} u dz = \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} z^{\alpha} R_{\mu}(z) D_t^{\ell} u dz$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} R_{\mu}(z) (\mu - A) u dz = \\ \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} R_{\mu}(z) (\mu - P(z, D_t)) u dz. \end{aligned}$$

La funzione $t \mapsto (\mu - A_z)^{-1} (\mu - P(z, D_t)) u(x, t)$ è, per quasi ogni x , l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} v \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu v(t) - P(z, D) v(t) = (\mu - P(z, D_t)) u(x, t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z, D) v)(0) = 0 & 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

e quindi la funzione $(\mu - A_z)^{-1} (\mu - P(z, D_t)) u(x, \cdot) - u(x, \cdot)$, che denotiamo con $w(x, \cdot)$, è la soluzione di

$$\begin{cases} v \in W^{2m,p}(\mathbb{R}^+) \\ \mu v(t) - P(z, D) v(t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ (B_k(z, D) v)(0) = -(B_k(z, D_t) u)(x, 0) & 1 \leq k \leq m, \end{cases}$$

cioè di (PO) con $b_k = -(B_k(z, D_t) u)(x, 0)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\mu}(D_x) (\mu - A) u &= \Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} R_{\mu}(z) (\mu - A) u dz = \\ &= \Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} (\mu - A_z)^{-1} (\mu - P(z, D_t)) u dz = \end{aligned}$$

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} (u + w) dz.$$

Ma

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} u dz = \Psi(D_x)^{-1} \Psi(D_x) u = u,$$

mentre si può dimostrare che

$$\Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} w dz = 0.$$

Tale dimostrazione si basa sul fatto che w , essendo soluzione di (PO), può essere scritta in una forma particolare e impiega il lemma 4.4 per trasformare l'espressione scritta sopra in un'altra in cui compaiono termini del tipo $(B_k(D_x, D_t)u)(\cdot, 0)$ che sono nulli perché $u \in \mathcal{D}(A)$.

Da ciò che si è dimostrato finora segue che $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega} \subseteq \rho(A)$ e che per $\theta \in]\omega, \pi[$ esiste $C(\theta) \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} \quad \|(\mu - A)^{-1}\| \leq \frac{C(\theta)}{|\mu|}.$$

Per dimostrare che A è settoriale rimane da dimostrare che ha dominio e immagine densi. La densità del dominio è ovvia. La dimostrazione della densità dell'immagine si ottiene provando anzitutto che A è iniettivo, cosa che segue abbastanza facilmente dalle stime appena viste, e osservando che dal fatto che L^p è riflessivo e dalla stima sul risolvente di A segue che tutto lo spazio è somma diretta del nucleo di A con la chiusura della sua immagine, quindi la iniettività implica che l'immagine è densa.

Proviamo ora la uguaglianza $g_h(D_x) = h(A)$. È sufficiente dimostrare tale uguaglianza per $h \in H_0^\infty$. Si ha

$$\begin{aligned} h(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\mu) R_\mu(D_x) d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\mu) \Psi(D_x)^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) R_\mu(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Psi(D_x)^{-1} \int_{\gamma} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \Psi(z) h(\mu) R_\mu(z) \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \Psi(D_x)^{-1} \int_{\Gamma} \Psi(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\mu) R_\mu(z) d\mu \prod_{r=1}^n (z_r - D_r)^{-1} dz = g_h(D_x). \end{aligned}$$

Come già osservato, visto che $g_h(D_x) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+))$ e $\|g_h(D_x)\| \leq C(\theta) \|h\|_{H^\infty}$, ciò garantisce la limitatezza del calcolo funzionale per A .

Infine da quanto visto finora si ottiene la stima a priori:

Teorema 4.6 *Esiste $C > 0$ tale che $\forall u \in \mathcal{D}(A)$*

$$\|u\|_{W^{2m,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \leq C \left(\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \right).$$

Dimostrazione. Il teorema è una conseguenza immediata del fatto che gli operatori $G_{\mu,\alpha,\ell}$ sono limitati, infatti per $u \in \mathcal{D}(A)$, dai lemmi 4.2 e 4.5 segue

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2m,p}} &= \left(\sum_{|\alpha|+\ell \leq 2m} \|D_x^\alpha D_t^\ell u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{|\alpha|+\ell \leq 2m} \|D_x^\alpha D_t^\ell R_{-1}(D_x)(-1-A)u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq \\ &\quad \left(\sum_{|\alpha|+\ell \leq 2m} \|G_{-1,\alpha,\ell}(D_x)\|^p \right)^{1/p} \left(\|Au\|_{L^p} + \|u\|_{L^p} \right). \end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I; Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.
- [2] M. S. AGRANOVICH, M. I. VISHIK: Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type; Russian Math. Surveys **19** n. 3 (1964), 53-157.
- [3] H. AMANN, M. HIEBER, G. SIMONETT: Bounded H_∞ -calculus for elliptic operators; Differential Integral Equations **7** (1994), 613-653.
- [4] W. ARENDT, A. F. M. TER ELST: Gaussian estimates for second order elliptic operators with boundary conditions; J. Operator Theory **38** (1997), 87-130.
- [5] G. DORE, A. VENNI: On the closedness of the sum of two closed operators; Math. Z. **196** (1987), 189-201.
- [6] G. DORE, A. VENNI: H^∞ functional calculus for bisectorial operators; preprint.
- [7] X. T. DUONG: H_∞ functional calculus of elliptic operators with C^∞ coefficients on L^p spaces on smooth domains; J. Austral. Math. Soc. Ser. A **48** (1990), 113-123.
- [8] X. T. DUONG: H_∞ functional calculus of second order elliptic partial differential operators on L^p spaces; in "Miniconference on Operators in Analysis" (I. Doust, B. Jefferies, C. Li, A. McIntosh, editors), Proc. Centre Math. Anal. A. N. U. vol. 24 (1990), pp. 91-102.
- [9] X. T. DUONG, A. MCINTOSH: Functional calculi of second-order elliptic partial differential operators with bounded measurable coefficients; J. Geom. Anal. **6** (1996), 181-205.
- [10] X. T. DUONG, E. M. OUAHABAZ: Complex multiplicative perturbations of elliptic operators: heat kernel bounds and holomorphic functional calculus; Differential Integral Equations **12** (1999), 395-418.

- [11] X. T. DUONG, G. SIMONETT: H_∞ -calculus for elliptic operators with nonsmooth coefficients; *Differential Integral Equations* **10** (1997), 201–217.
- [12] Y. GIGA, H. SOHR: Abstract L^p -estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains; *J. Funct. Anal.* **102** (1991), 72–94.
- [13] N. J. KALTON, L. WEIS: The H^∞ -calculus and sums of closed operators; preprint.
- [14] A. MCINTOSH, A. NAHMOD: Heat kernel estimates and functional calculi of $-b\Delta$; *Math. Scand.* **87** (2000), 287–319.
- [15] J. PRÜSS, H. SOHR: On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces; *Math. Z.* **203** (1990), 429–452.
- [16] J. PRÜSS, H. SOHR: Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p -spaces, *Hiroshima Math. J.* **23** (1991), 161–192.
- [17] R. T. SEELEY: Complex powers of an elliptic operator; in: “Singular Integrals”, *Proc. Simpos. Pure Math.* vol. 10, American Mathematical Society, 1967, pp. 288–307.
- [18] R. T. SEELEY: The resolvent of an elliptic boundary problem; *Amer. J. Math.* **91** (1969), 889–920.
- [19] R. T. SEELEY: Norms and domains of the complex powers A_B^z ; *Amer. J. Math.* **93** (1971), 299–309.
- [20] H. SOHR, G. THÄTER: Imaginary powers of second order differential operators and L^q -Helmholtz decomposition in the infinite cylinder; *Math. Ann.* **311** (1998), 577–602.
- [21] V. A. SOLONNIKOV: On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I; *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **56** (1966), 193–232.
- [22] H. TRIEBEL: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*; North-Holland, 1978.
- [23] A. VENNI: Mihlin multiplier theorem and R-boundedness; preprint.
- [24] A. VENNI: *Calcolo funzionale e R-limitatezza*; Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Bologna, 2001.